Capítulo 6

Aplicaciones de la Integral

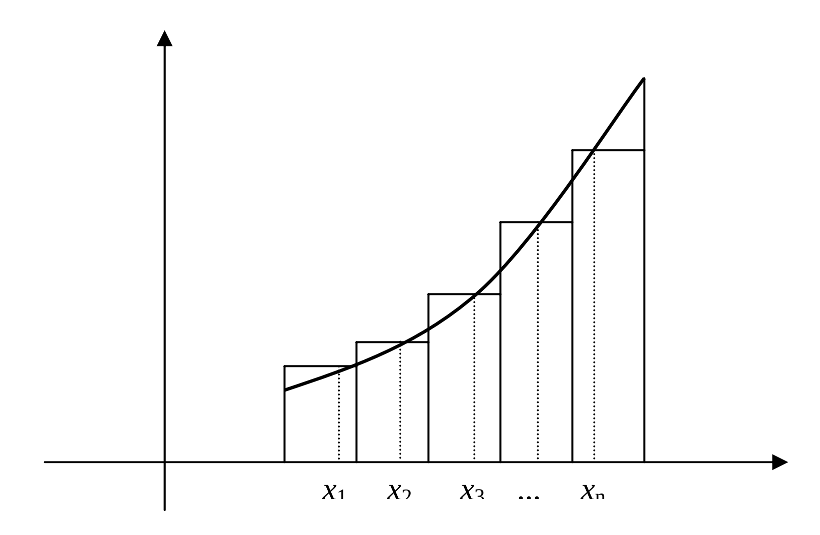
6.1 Introducción.

En las aplicaciones que desarrollaremos en este capítulo, utilizaremos una variante de la definición de integral la cual es equivalente a la que se dio en el Capítulo 3.

Dada una subdivisión del intervalo en n partes iguales, cada una de longitud Δx_k, nos podemos aproximar a la integral de la función en el intervalo dado mediante sumas superiores o sumas inferiores

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \qquad I_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

donde M_k y m_k son el mínimo y el máximo valor de la función en el *k*-ésimo subintervalo determinado por la partición.



Si consideramos la suma

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

donde x_k es cualquier punto del k-ésimo subintervalo, claramente se cumple:

$$m_k \le f(x_k) \le M_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots n.$$

Multiplicando por Δx_k obtenemos

$$m_k \Delta x_k \le f(x_k)\Delta x_k \le M_k \Delta x_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots n.$$

Sumamos estas n desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

es decir:

$$I_n \le R_n \le S_n$$

pero como

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \int_a^b f(x)\,dx$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

En las aplicaciones de la integral, a menudo el planteamiento de un problema nos conduce a calcular el límite de una sumatoria como la anterior, la cual identificaremos como la integral y resolveremos utilizando las técnicas correspondientes.

Esquemáticamente y con el fin de tener presente el concepto de integral, podemos resumir este procedimiento omitiendo el subíndice k e intercambiando límite de la sumatoria por integral y Δx_k por dx, es decir,

$$\lim \sum \;\rightarrow \int \qquad\qquad x_k \rightarrow x \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \Delta x_k \rightarrow dx$$

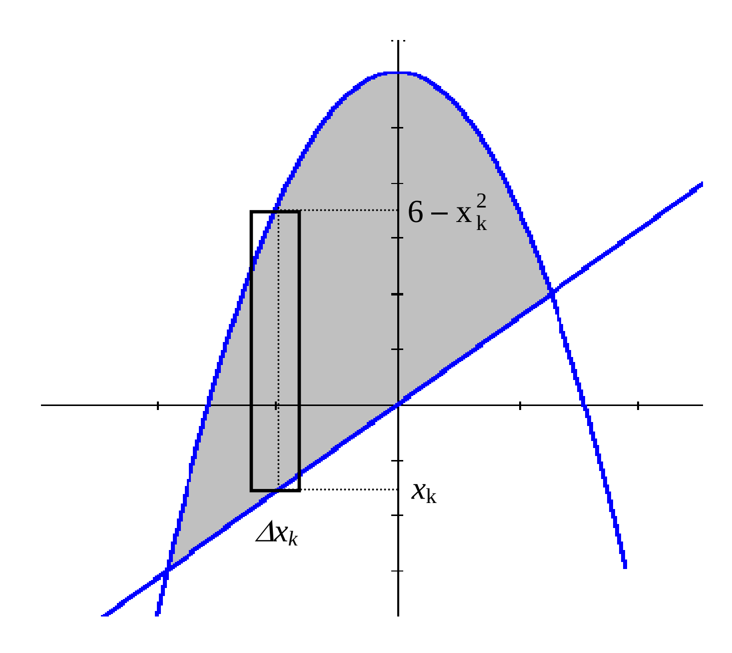
6.2 Cálculo de Áreas

En los siguientes ejemplos encontraremos el área de una región dada. Dicha región será considerada como el área comprendida entre dos curvas, cuyas intersecciones definen el intervalo que subdividiremos en n partes iguales, a partir de lo cual encontraremos aproximaciones cuyo límite será el área buscada. A este límite lo identificaremos como una integral.

Posteriormente resumiremos este proceso de integración con la introducción de diferenciales de áreas y no trataremos explícitamente con las subdivisiones del intervalo de integración.

Ejemplo 1. Encuentre el área de la región delimitada por la parábola $y = 6 - x^2$ y la recta $y = x$

Solución:



Primeramente encontraremos los puntos de intersección, igualando la parábola $y = 6 - x^2$ y la recta y = x, para determinar el intervalo de integración.

$$6 - x^2 = x$$

$$6 - x^2 = x \iff x^2 + x - 6 = 0 \iff (x + 3)(x - 2) = 0$$

cuyas soluciones son $x = -3$ y $x = 2$.

Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots a_n\}$ una subdivisión del intervalo [-3, 2] y $x_k \in [a_{k-1}, a_k]$ para k = 1,2,...n

El área del rectángulo genérico de base Δx_k (el área del k-ésimo rectángulo determinado por la partición) es:

$$(6 - x_x^2 - x_k)\Delta x_k$$

Nótese que, para encontrar la altura del rectángulo debemos saber cuál es la curva que queda por arriba y cuál la que queda por abajo.

Un valor aproximado al área buscada es la suma de los rectángulos determinados por la subdivisión:

$$\sum_{k=1}^{n} (6 - x_x^2 - x_k)\Delta x_k$$

y el valor exacto del área es el límite de estas aproximaciones, el cual lo identificamos con una integral:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (6 - x_x^2 - x_k)\Delta x_k = \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\, dx = \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

En base a esto, directamente escribimos el área del rectángulo genérico, al que llamaremos dA, como:

$$dA = (6 - x^2 - x)dx$$

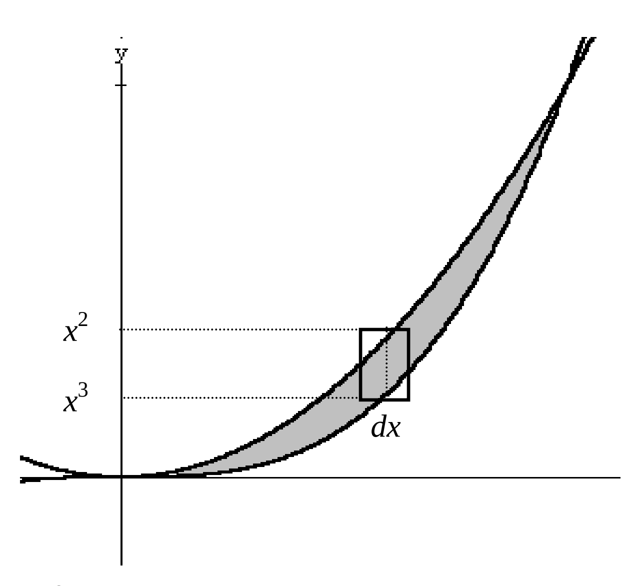
encontrando el área buscada como proceso de integrar esta expresión

$$A = \int_{-3}^{2} (6 - x^2 - x)\, dx = \frac{125}{6}$$

Ejemplo 2. Encuentre el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$y = x^2 \quad \text{y} \quad y = x^3$$

Solución:



Para cada $x \in [0,1]$, el diferencial de área es:

$$dA = (x^2 - x^3)\, dx$$

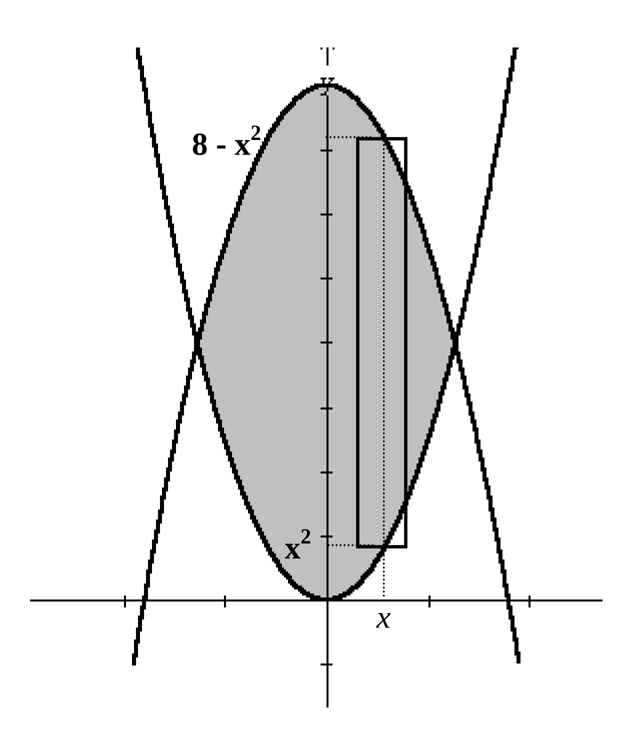
Valor exacto del área:

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Ejemplo 3. Encuentre el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$y = x^2 \quad \text{y} \quad y = 8 - x^2$$

Solución:



Los puntos de intersección de las curvas satisfacen

$$8 - x^2 = x^2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 = 8 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2$$

El diferencial de área es.

$$dA = (8 - x^2 - x^2)\, dx$$

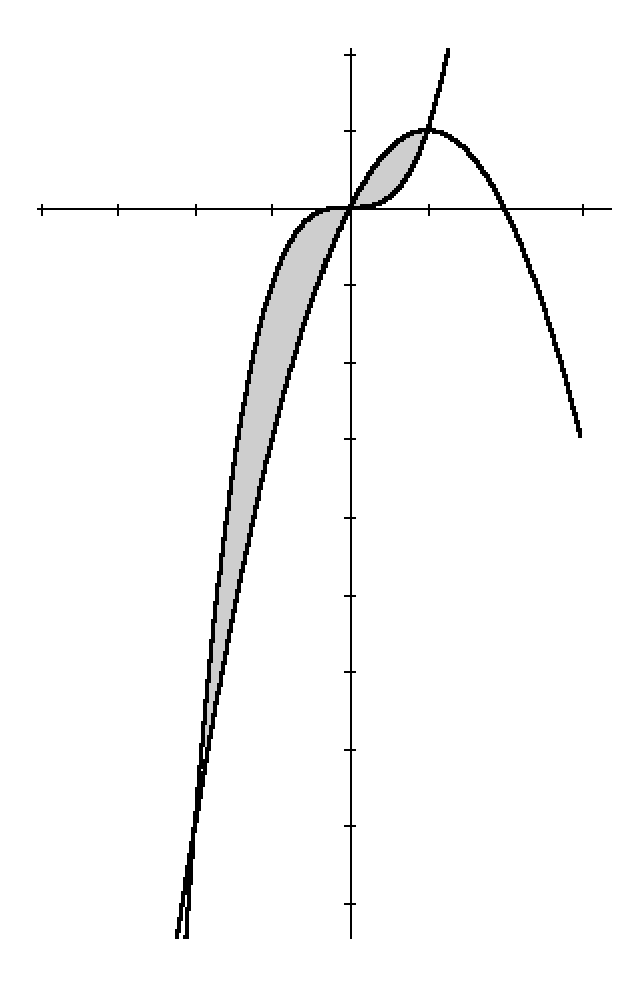
y el valor del área:

$$\int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = 2(16 - \frac{16}{3}) = \frac{64}{3}$$

Ejemplo 4. Encuentre el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones

$$y = x^3 \qquad \text{y} \qquad y = 2x - x^2$$

Solución:



Las intersecciones entre estas dos curvas están dadas por las soluciones de la ecuación:

$$x^3 = 2x - x^2 \iff x(x^2 + x - 2x) = 0 \iff x(x - 1)(x + 2) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$$

Nótese que en el intervalo [-2, 0] la curva $y = x^3$ se encuentra por arriba de la curva $y = 2x - x^2$, pasando lo contrario en el intervalo [0, 1].

Así pues tendremos que encontrar los diferenciales de área correspondientes a cada uno de estos intervalos y efectuar integraciones por separado.

En el intervalo [-2, 0]:

$$dA_1 = (x^3 - 2x + x^2)\, dx$$

y en el intervalo [0, 1]:

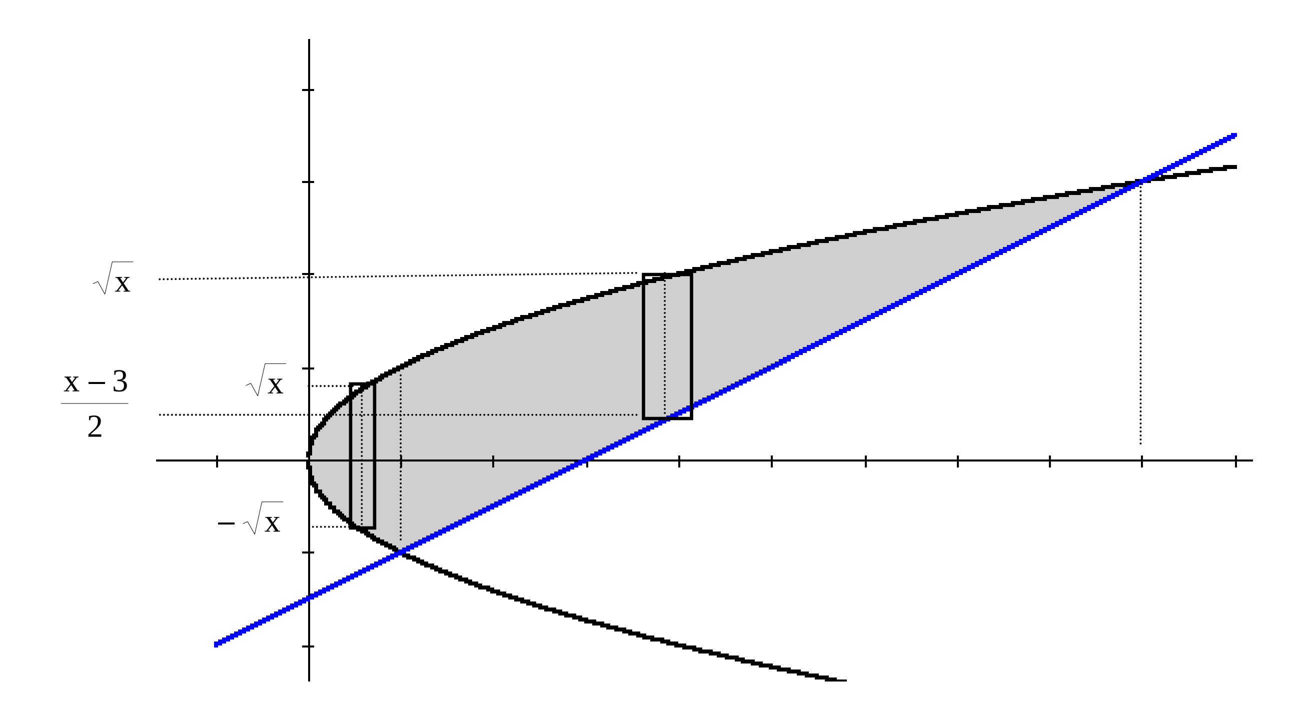
$$dA_2 = (2x - x^2 - x^3)\, dx$$

por lo que el área será:

$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x + x^2)\, dx + \int_{0}^{1} (2x - x^2 - x^3) = \frac{37}{12}$$

Ejemplo 5. Encuentre el área de la región delimitada por las gráficas de la parábola $x = y^2$ y la recta $x - 2y - 3 = 0$

Solución:



Las ordenadas de las intersecciones están dadas por las soluciones de:

$$y^2 = 2y + 3 \iff y^2 - 2y - 3 = 0 \iff (y - 3)(y + 1) = 0 \iff y_1 = 3\,, \quad y_2 = -1$$

siendo los correspondientes valores de x: $x_1 = 1$, $x_2 = 9$.

Si procedemos como en el ejemplo anterior, tendríamos que calcular el diferencial de área correspondiente al intervalo [0, 1] y el correspondiente al intervalo [1, 9], siendo éstos:

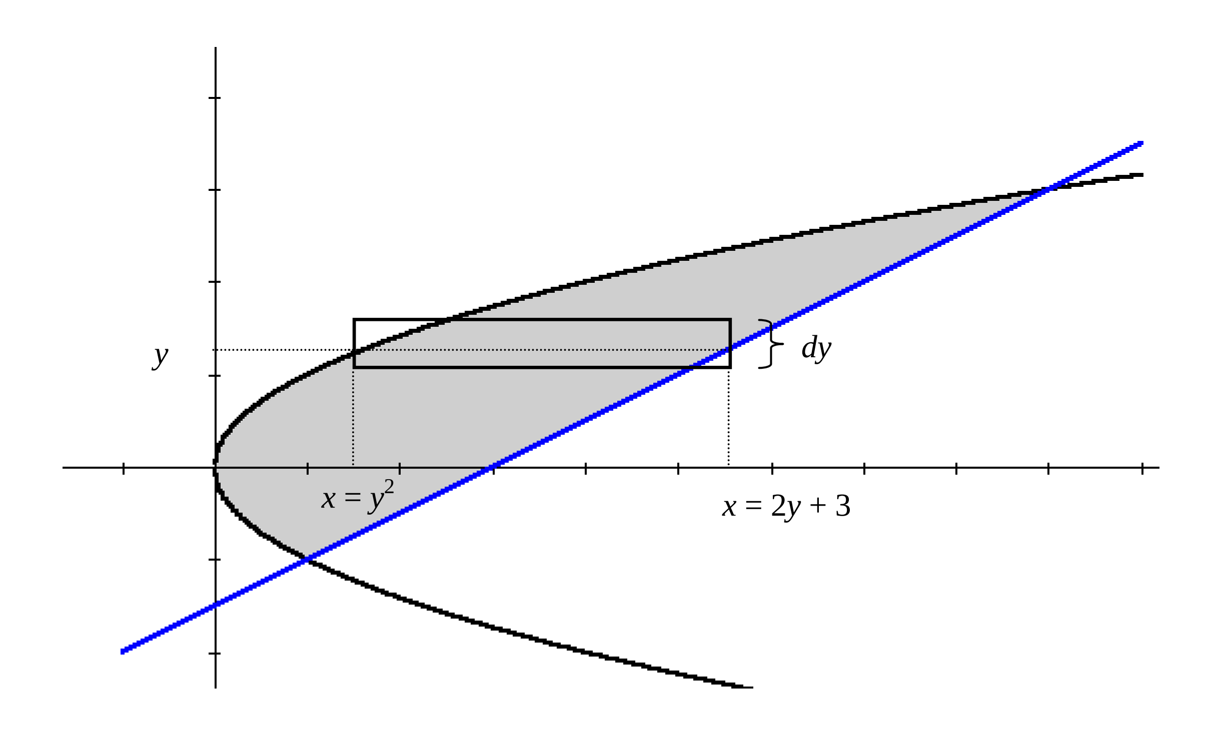
$$dA_1 = 2\sqrt{x}\,dx \qquad \text{y} \qquad dA_2 = \left(\sqrt{x} - \frac{x-3}{2}\right)dx$$

el valor del área:

$$A = \int_0^1 2\sqrt{x}\,dx + \int_1^9 \left(\sqrt{x} - \frac{x-3}{2}\right)dx = \frac{32}{3}$$

El problema que nos condujo a tener que separar en dos integrales se debe a que en toda el área de integración no podemos encontrar un rectángulo genérico uniforme, es decir, uno cuyo extremo superior se encuentre en la función de arriba y el extremo inferior en la de abajo.

Si en vez de considerar diferenciales de área verticales, los tomamos horizontales, sí será posible encontrar un rectángulo genérico uniforme, solo que tendremos que expresar a nuestras funciones en términos de *y*, es decir, tendremos que trabajar con las funciones inversas correspondientes.



Para cada $y \in [-1, 3]$

$$dA = (2y + 3 - y^2)dy$$

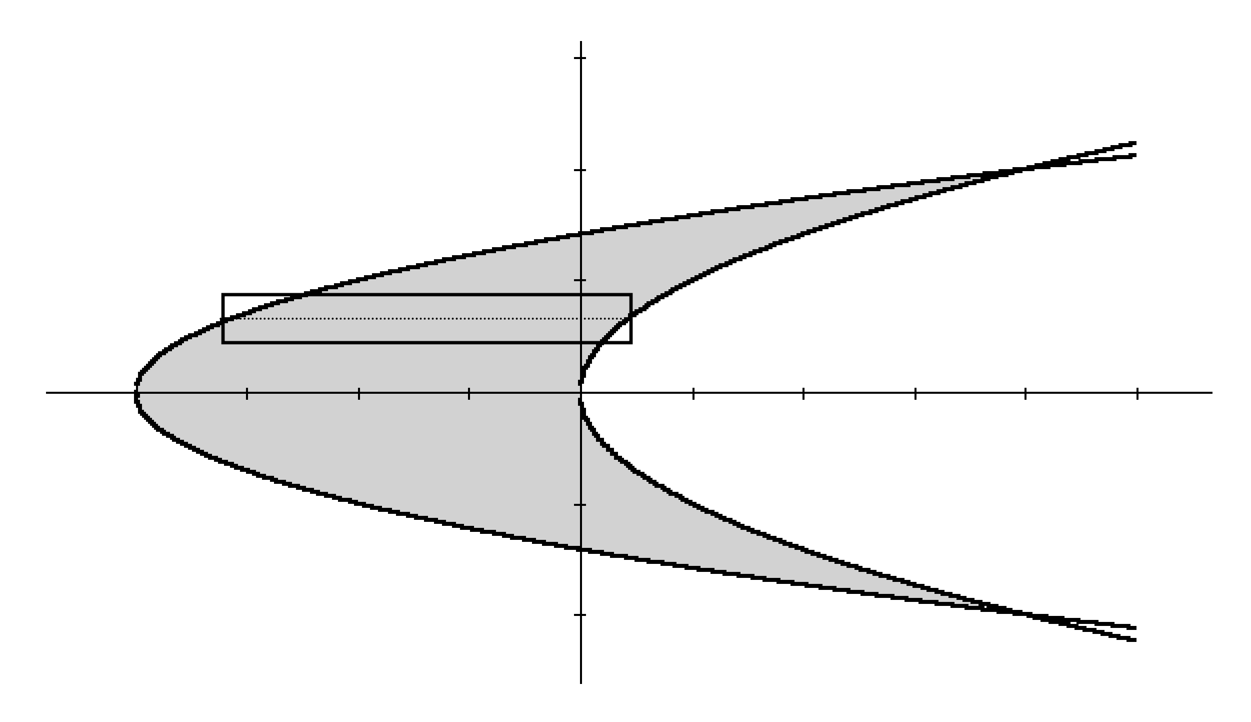
y por lo tanto el área es:

$$A = \int_{-1}^{3} (2y + 3 - y^2)\,dy = \left[y^2 + 3y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{3} = 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}$$

Ejemplo 6. Encuentre el área de la región delimitada por las gráficas de las parábolas

$$2y^2 = x + 4 \quad \text{y} \quad x = y^2$$

Solución



Como en el ejemplo anterior es más fácil utilizar diferenciales de área horizontales ya que no es posible encontrar un rectángulo vertical genérico.

Las intersecciones de estas parábolas satisfacen:

$$2y^2 - 4 = y^2 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; y = \pm 2$$

Así pues para $y \in [-2, 2]$

$$dA = (y^2 - 2y^2 + 4)\,dy$$

y el valor del área:

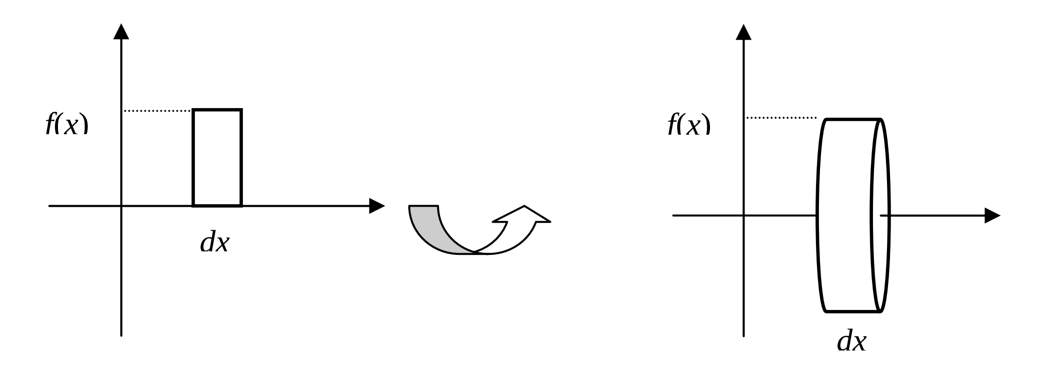
$$A=\int_{-2}^{2}(y^2-2y^2+4)\,dy=\int_{-2}^{2}(-y^2+4)\,dy=\left[-\frac{y^3}{3}+4y\right]_{-2}^{2}=2(8-\frac{8}{3})=\frac{32}{3}$$

Observe que por la simetría de la región, podemos calcular el área encima del eje *x*, integrando de 0 a 1 y multiplicarla por dos, es decir

$$A=2\int_{0}^{2}(y^2-2y^2+4)\,dy=2\int_{0}^{2}(-y^2+4)\,dy=2\left[-\frac{y^3}{3}+4y\right]_{0}^{2}=2(8-\frac{8}{3})=\frac{32}{3}$$

6.3 Cálculo de Volúmenes de Sólidos de Revolución.

En los ejemplos que desarrollaremos a continuación, utilizaremos el hecho básico de que un rectángulo de base dx y altura f(x), como en la figura, al girar en torno al eje x, genera un cilindro de radio f(x) y altura dx:



Cuyo volumen es

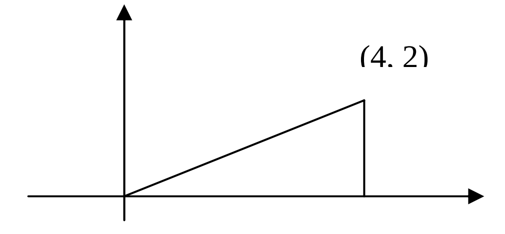
$$dV = \pi\left[f(x) \right]^2 dx$$

En los siguientes ejemplos los diferenciales de volumen serán de esta naturaleza.

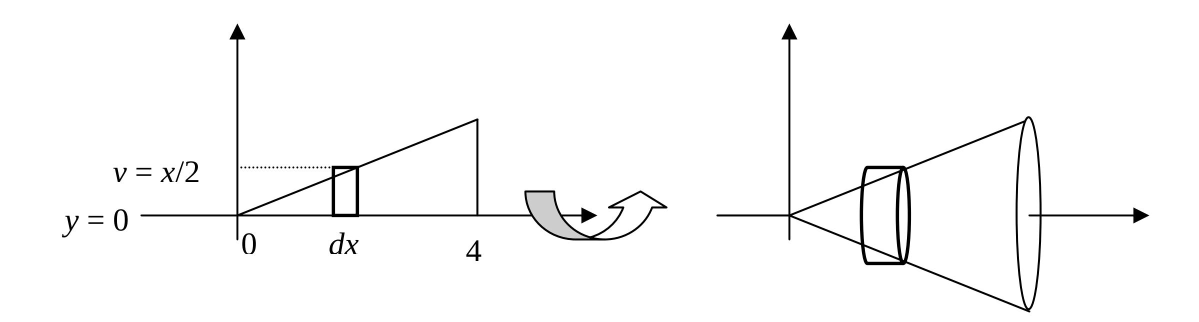
Como en el caso del cálculo de áreas, el volumen del sólido lo obtendremos tomando límites de aproximaciones que también las identificaremos con integrales. En estos casos, las aproximaciones al volumen se harán por medio de volúmenes de cilindros, cada uno de los cuales está generado por la rotación de un rectángulo de los que aproximan el área de la región que lo genera.

A partir de aquí no utilizaremos explícitamente las subdivisiones, sino sólo los elementos genéricos (diferenciales de área y de volumen).

Ejemplo 1. Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar en torno al eje x el triángulo de la figura:



Solución: Al girar esta región alrededor del eje *x*, se genera un cono de altura 4 y radio 2 como se muestra en la siguiente figura.



Aunque sólo se dibuja un rectángulo genérico, debemos pensar que los rectángulos son una aproximación al área de la región y que al girar el sistema completo (la región y los rectángulos que la aproximan) obtendremos una aproximación al volumen del sólido mediante los volúmenes de cilindros. El límite de dichas aproximaciones, la integral, nos dará el volumen del sólido generado.

Para cada $x \in [0, 4]$, al girar el rectángulo genérico de la figura de la izquierda, en torno al eje x, genera el cilindro genérico de la derecha, el cual tiene volumen:

$$dV = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx$$

siendo el volumen

$$V = \int_0^4 \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^4 x^2 dx = \left[\frac{\pi x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{64\pi}{12} = \frac{16\pi}{3}$$

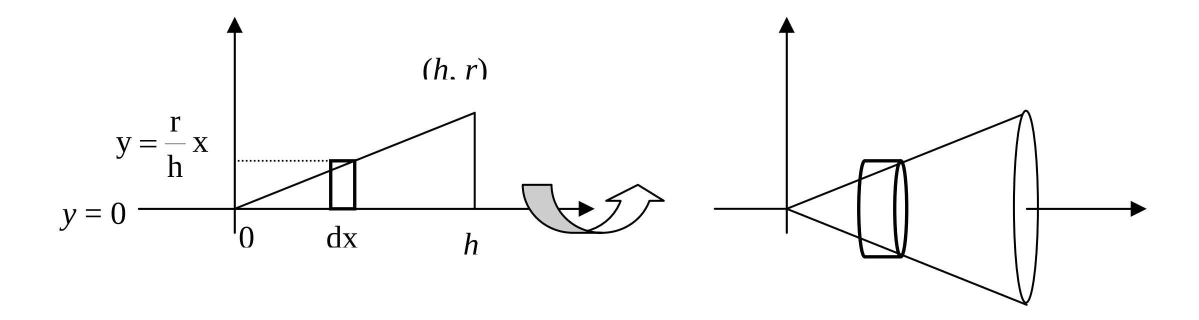
Lo cual verifica el resultado dado por la conocida fórmula de la geometría para el volumen de un cono de altura h y radio r.

Ejemplo 2. Demuestre que el volumen de un cono de radio r y altura h es:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Solución: El cono de altura h y radio r será generado por la región de la figura, en la que la ecuación de la recta que pasa por (0, 0) y (h, r) es

$$y = \frac{r}{h}x$$



Para cada $x \in [0, h]$, al girar el rectángulo genérico de la figura de la izquierda, en torno al eje *x*, se obtiene el cilindro genérico de la derecha, cuyo volumen es:

$$dV = \pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$$

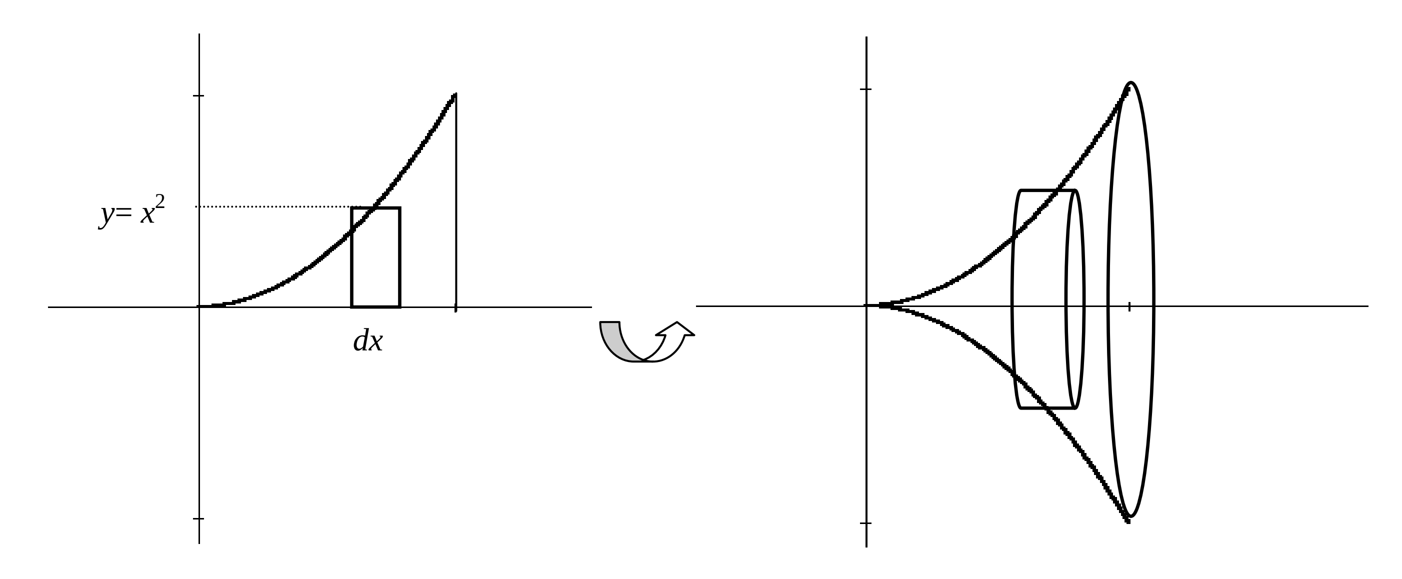
siendo el volumen total del sólido de revolución:

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^4 x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Utilizando este mismo método podemos encontrar volúmenes de otros sólidos de revolución para los que la geometría no proporciona fórmulas, como el siguiente:

Ejemplo 3. Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar en torno al eje *x* la parábola $y = x^2$ en el intervalo [0, 1].

Solución:



Para cada $x \in [0, 1]$

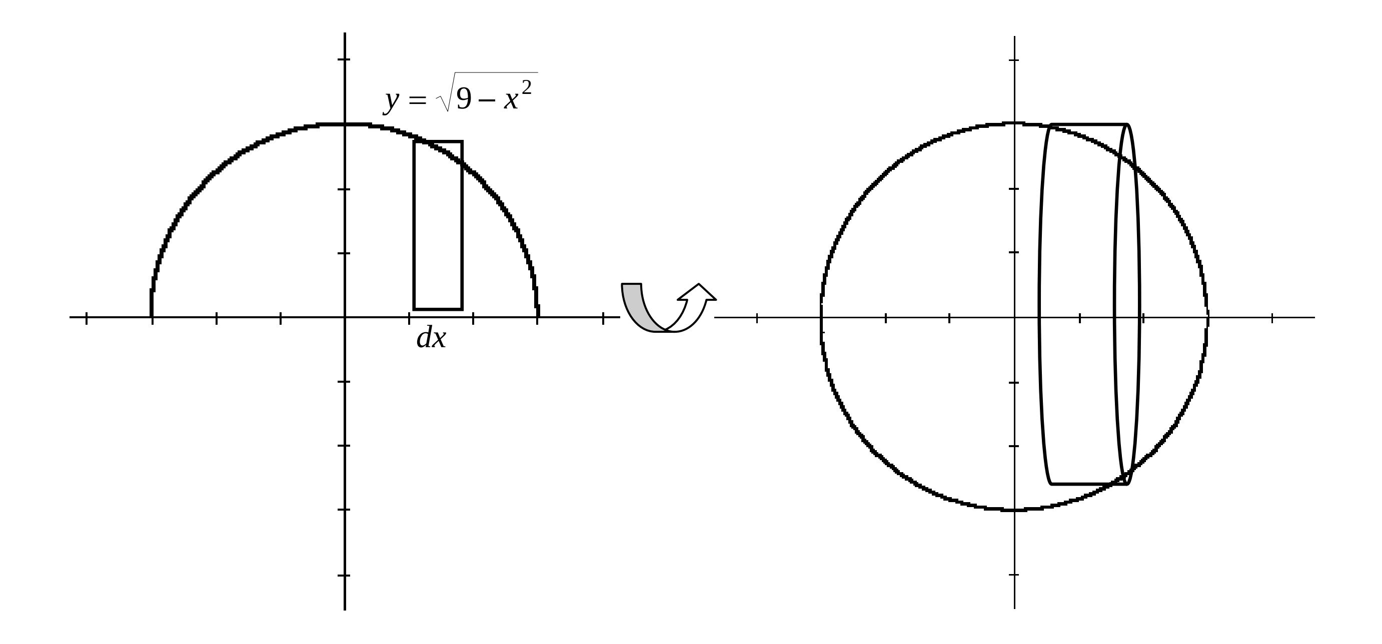
$$dV = \pi (x^2)^2 \, dx$$

y por lo tanto el volumen del sólido es:

$$V = \int_0^1 \pi x^4 \, dx = \left[\frac{\pi x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5}$$

Ejemplo 4. Encuentre el volumen de una esfera de radio 3.

Solución:



Para cada $x \in [-3, 3]$

$$dV = \pi \left(\sqrt{9 - x^2} \right)^2 dx$$

y el volumen de la esfera es

$$V = \int_{-3}^{3} \pi \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-3}^{3} \pi (9 - x^2)\, dx = 2\pi \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 36\pi$$

Lo cual verifica el resultado de aplicar la fórmula para calcular el volumen de una esfera de radio *r*, que nos da la geometría. Con el procedimiento anterior, deduciremos esta fórmula en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Demuestre que el volumen de una esfera de radio *r* es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

.

Solución:_ La ecuación de la circunferencia de radio r que generará a la esfera de radio r es:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Tomando como referencia el dibujo anterior, sólo que considerando la función

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

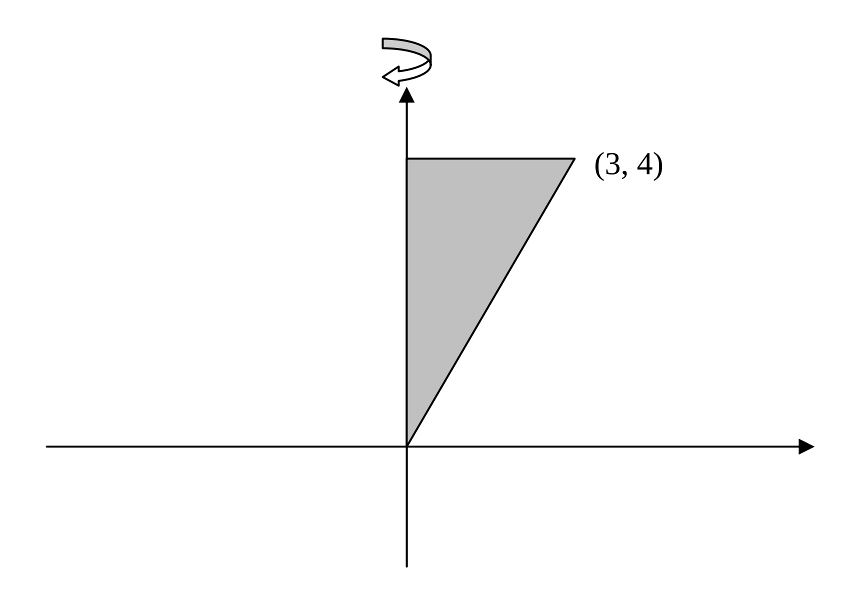
para cada $x \in$ [-3, 3]

$$dV = \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

y el volumen de la esfera es

$$V = \int_{-r}^{r} \pi \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-r}^{r} \pi (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi (r^3 - \frac{r^3}{3}) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

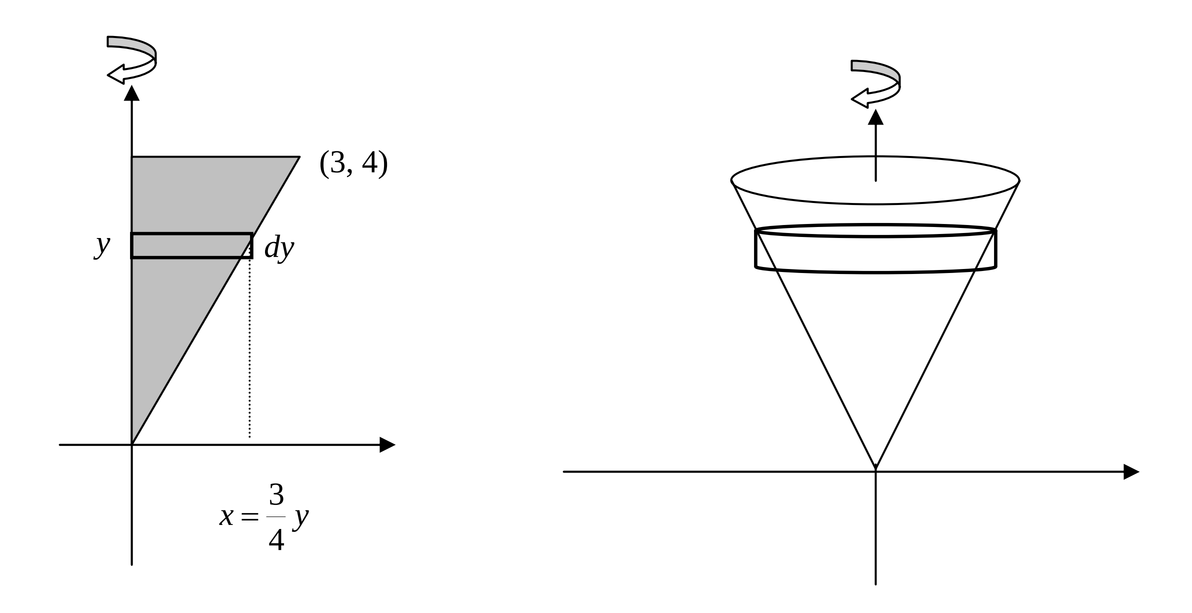
Ejemplo 6. Encuentre el volumen del sólido obtenido al girar en torno al eje *y* la región delimitada por el eje *y* y la recta de la figura.



Solución:
Al girar en torno al eje *y*, esta región generará un cono de radio 3 y altura 4.

Obsérvese que en este caso es conveniente utilizar diferenciales horizontales para que al girarlos entorno al eje *y* generen cilindros como en el caso anterior. Para hacer esto debemos tener la ecuación de la recta en términos de *y*.

$$x = \frac{3}{4}y$$



Para cada $y \in [0, 4]$

$$dV = \pi\left(\frac{3y}{4}\right)^2 dy$$

y el volumen del sólido es:

$$V = \int_0^4 \pi\left(\frac{3y}{4}\right)^2 dy = \left[\frac{9\pi}{48} y^3\right]_0^4 = 12\pi$$

6.4 Trabajo Mecánico.

En esta sección abordaremos problemas de la física cuya solución se obtiene por medio del mismo método de subdivisión, aproximaciones y límite de éstas para resolver finalmente por medio de integrales.

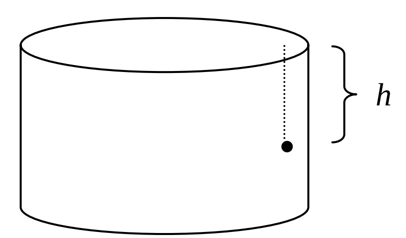
En los problemas que veremos en esta sección, se requiere calcular el trabajo necesario para vaciar un cierto volumen de agua, la cual se extrae mediante una bomba.

El principio básico que se aplicará en estos problemas, es el hecho de que el trabajo realizado al mover una partícula de materia esta dado por el producto entre la fuerza que actúa sobre dicha partícula (que deberá ser igual al propio peso) y la distancia que esta recorre. En el problema que nos ocupa, observe que para bombear del depósito una partícula del líquido, sólo es necesario levantarla hasta el borde ya que desde ese punto la partícula cae libremente por su propio peso. Así pues el problema se reduce a calcular el trabajo requerido para levantar sucesivamente todas las partículas del líquido hasta el borde del recipiente.

Cuando cada partícula se levanta hasta el borde, recorre una distancia igual a su profundidad h, en el recipiente. La fuerza F necesaria para levantar una partícula es igual al producto del volumen V de la partícula, la densidad, ρ del líquido en cuestión y la fuerza de gravedad g; este producto manejado en las unidades correspondientes nos determina el peso de la partícula, por lo que **el trabajo a realizar en el desplazamiento de la partícula hasta el borde del recipiente, está dado por**



$$W = \rho g V h$$

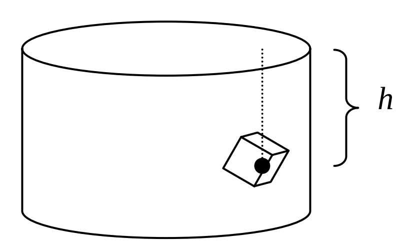


Para calcular el trabajo de vaciar el total de agua, haremos una subdivisión del volumen total en pequeños volúmenes de agua, calcularemos el trabajo para llevar hasta el borde cada una de ellos, sumaremos estos trabajos obteniendo una aproximación y posteriormente, el límite de las aproximaciones (de nuevo la integral) nos dará el trabajo buscado.

Es conveniente aclarar que la suma de esos trabajos es una aproximación puesto que cada volumen de agua contiene partículas a distinta profundidad pero como consideraremos

volúmenes muy pequeños, podemos suponer que todas las partículas se encuentran aproximadamente a la misma profundidad.

En la siguiente figura el volumen *V* de agua se encuentra aproximadamente a una profundidad *h*



Por lo que el trabajo *W* para llevarlo al borde será:

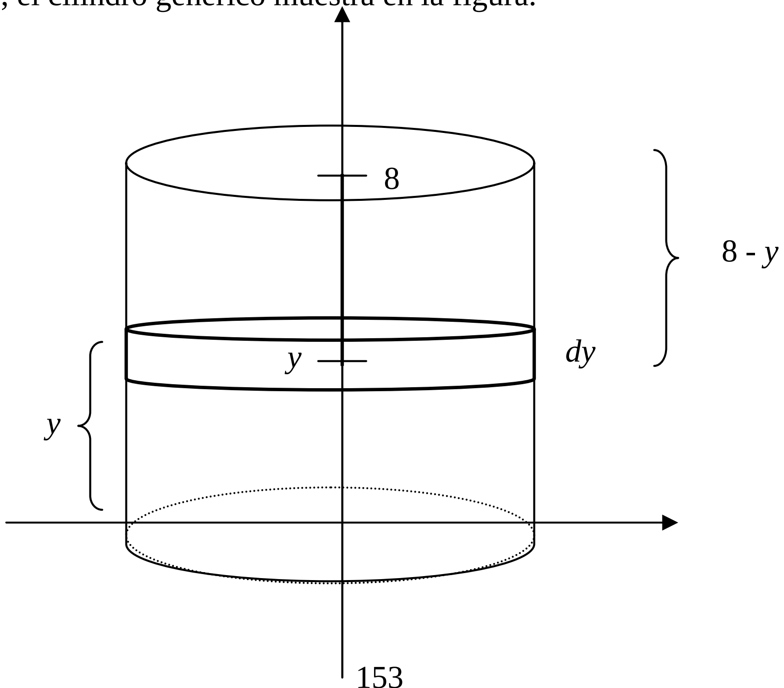
$$W \cong \rho g V h$$

En realidad la subdivisión no la haremos en cubitos como los de la figura anterior sino en cilindros de altura muy pequeña como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Encuentre el trabajo que se requiere para vaciar un depósito cilíndrico lleno de agua de 3m. de radio y 8m de altura.

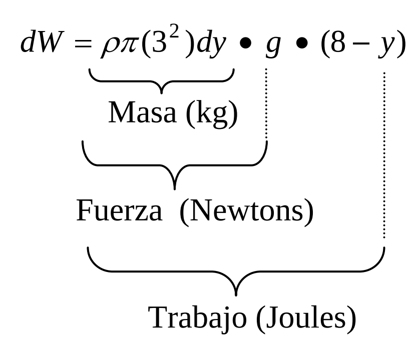
Solución: Ubiquemos nuestro depósito cilíndrico en un sistema de coordenadas con origen en el centro de la base y el eje y sobre la altura del mismo.

Dividamos el volumen de agua del cilindro en n cilindros de radio 3 y altura $dy = \Delta y_n = 3/n$, el cilindro genérico muestra en la figura.



Para cada $y \in [0, 8]$, calculamos el trabajo requerido para llevar hasta el borde el volumen del cilindro de radio 3 y altura dy (diferencial de trabajo dW)

$$dW = \rho\pi(3^2)dy \bullet g \bullet (8-y)$$



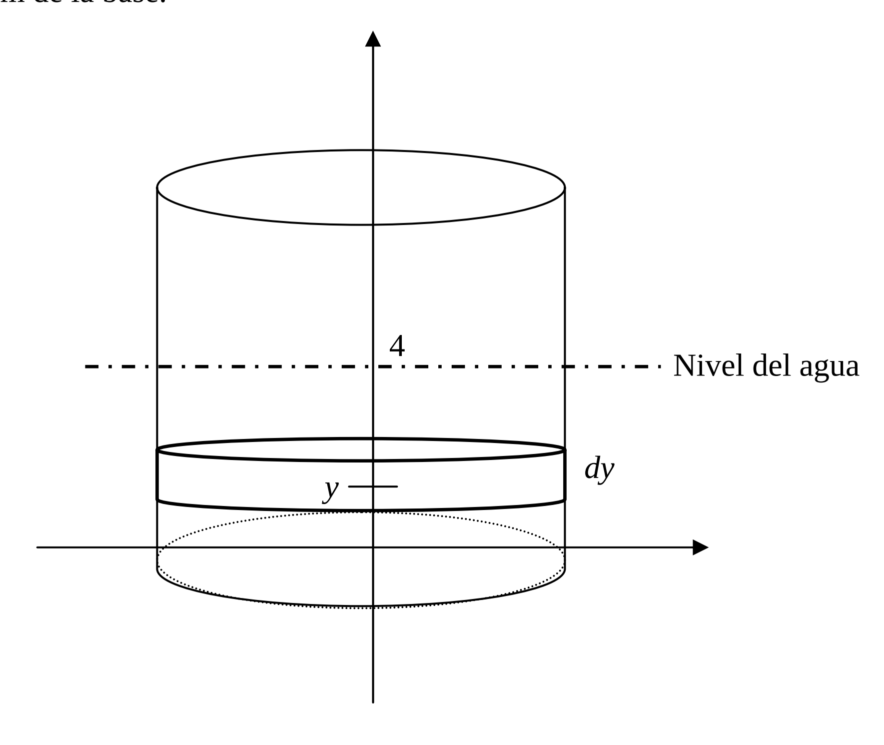
Por lo tanto el trabajo lo obtenemos integrando este diferencial:

$$W = \int_0^8 9\pi\rho g\,(8-y)\,dy = 9\pi\rho g\left[8y - \frac{y^2}{2}\right]_0^8 = 9\pi\rho g\,\frac{64}{2} = 288\pi\rho g \;\; Joules.$$

<u>Observación</u>: Las unidades de trabajo son Joules, pues las unidades de fuerza son N = Newton (ρ y g expresadas en kg/m^3 y m/seg^2 , respectivamente).

Ejemplo 2. Encuentre el trabajo que se requiere para vaciar un depósito cilíndrico de 3m. De radio y 8m de altura si se encuentra a la mitad de su capacidad.

Solución: Se trata del depósito del problema anterior sólo que el nivel del agua se encuentra a 4 m de la base.



El diferencial de trabajo será el mismo que en el problema anterior y sólo cambiará el intervalo de integración a [0, 4], ya que consideraremos las rebanadas cilíndricas hasta la altura 4.

Para cada $y \in [0, 4]$

$$dW = 9\pi\rho g\,(8 - y)\,dy$$

y por lo tanto el trabajo será:

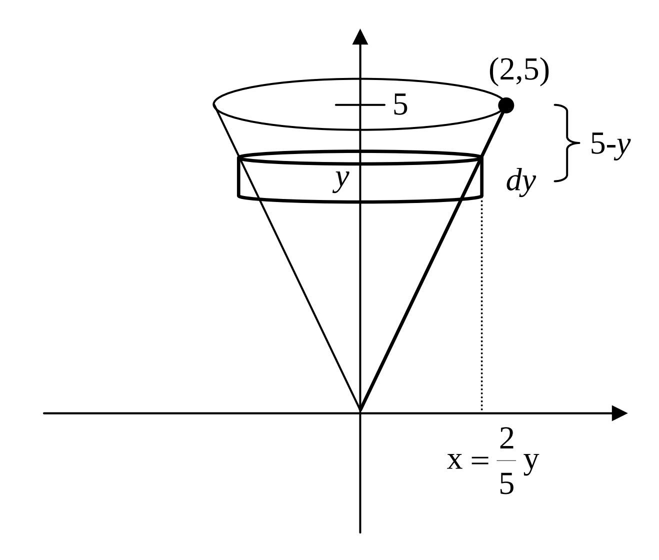
$$W = \int_0^4 9\pi\rho g\,(8 - y)\,dy = 9\pi\rho g\left[8y - \frac{y^2}{2}\right]_0^4 = 9\pi\rho g\,\frac{48}{2} = 216\pi\rho g\ \ Joules.$$

<u>**Observación**</u>: Nótese que aunque el volumen de agua es la mitad del ejemplo anterior, el trabajo para vaciarlo no difiere gran cosa del trabajo realizado cuando está lleno; esto se debe a que las partículas desde la base hasta la mitad de la altura están a una mayor profundidad que las de la otra mitad y por lo tanto "*cuesta más trabajo*" sacarlas.

es decir, el diferencial de trabajo será el mismo que en el problema anterior y sólo cambiará el intervalo de integración a [0, 4].

Ejemplo 3. Encuentre el trabajo que se requiere para vaciar un depósito cónico lleno de agua, de 2m de radio y 5m de altura.

Solución:



De nuevo ubicamos el depósito cilíndrico con su vértice en el origen, encontramos la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto (2,5) (perfil del cono)

$$y = \frac{5}{2}x$$

y entonces el radio del cilindro genérico es $x = \frac{2}{5}y$, obteniendo pues para cada $y \in [0, 5]$

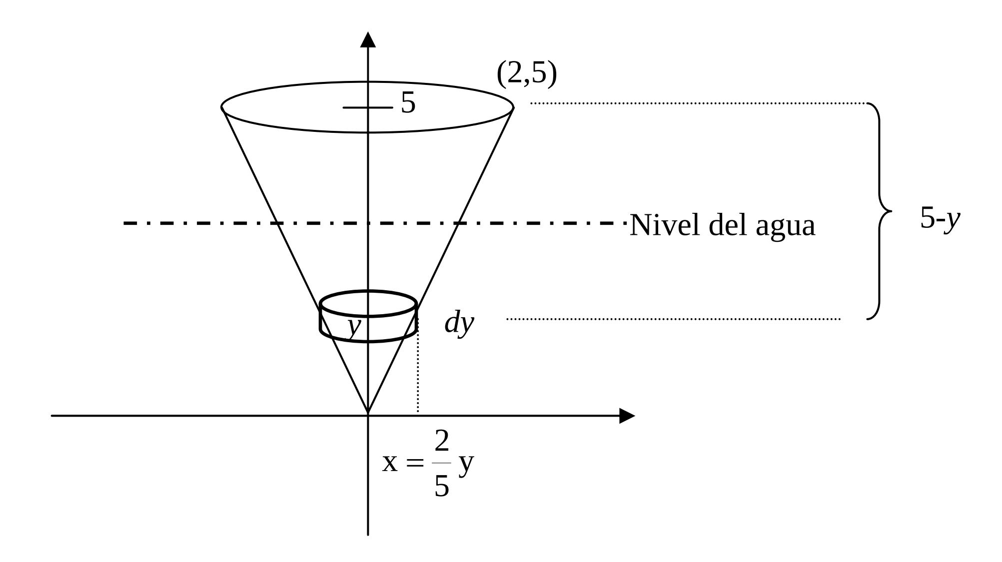
$$dW = \pi\left(\frac{2y}{5}\right)^2 dy \bullet \rho \bullet g \bullet (5 - y)$$

y el trabajo:

$$W = \int_0^5 \pi\rho g\left(\frac{2y}{5}\right)^2 (5 - y)\,dy = \frac{4\pi\rho g}{25}\int_0^5 \left(5y^2 - y^3\right)dy = \frac{4\pi\rho g}{25}\left(\frac{5y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)_0^5 = \frac{25}{3}\pi\rho g \text{ Joules}$$

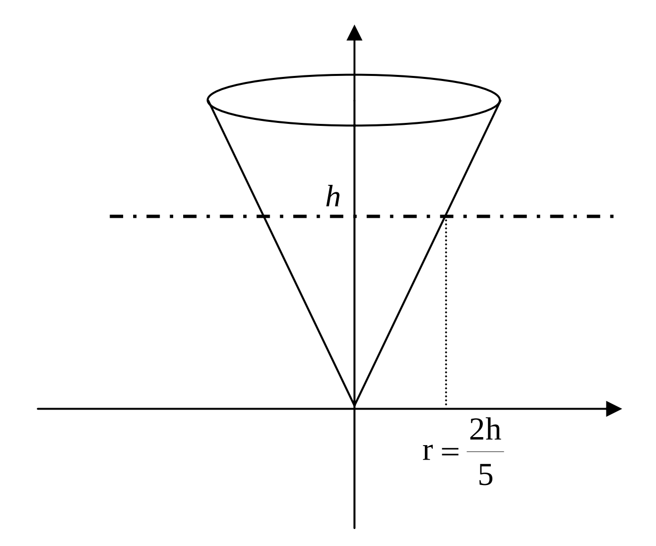
Ejemplo 4. Encuentre el trabajo que se requiere para vaciar un depósito cónico lleno de agua, de 2m de radio y 5m de altura, si se encuentra a la mitad de su capacidad.

Solución:



Como en el caso anterior tendremos que integrar el mismo diferencial, sólo que el intervalo de integración será desde 0 hasta la altura correspondiente a la mitad de la capacidad del cono.

Tenemos pues que encontrar el valor de h para el cual el cono correspondiente tiene volumen igual a $\frac{10\pi}{3}$, que es la mitad del volumen del depósito.



Es decir, tenemos que encontrar el valor de h para el cual

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{10\pi}{3}$$

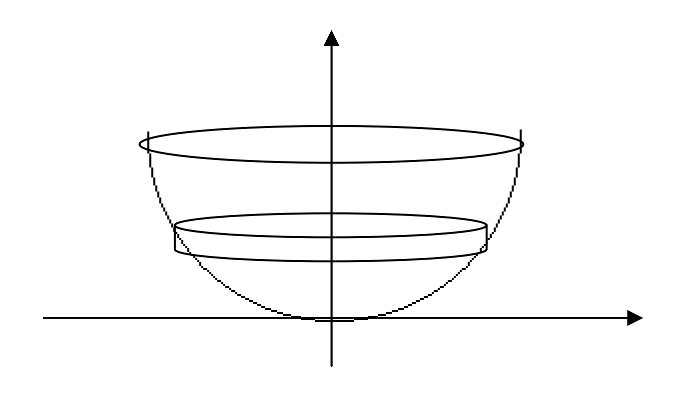
siendo este valor $h = \sqrt[3]{\frac{375}{6}} = 3.9685$

Así pues, el trabajo buscado es:

$$W = \int_0^{3.9685} \pi\rho g\left(\frac{2y}{5}\right)^2 (5-y)\,dy = (6.7454)\rho \text{ Joules.}$$

Ejemplo 5. Encuentre el trabajo que se requiere para bombear el agua de un tanque semiesférico lleno de agua, si el radio mide 3 m.

Solución:



Si ubicamos el depósito como en la figura, la ecuación de la circunferencia de radio 3 y centro en el punto (0, 3) (perfil del depósito) es:

$$x^2 + (y-3)^2 = 9$$

Desarrollando

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

Para cada $y \in [0, 3]$, despejando x obtendremos el radio del cilindro genérico

$$x = \sqrt{6y - y^2}$$

Así pues el diferencial de trabajo es

$$dW = \pi\left(\sqrt{6y - y^2}\right)^2 dy \bullet g \bullet \rho \bullet (3-y)$$

y el valor del trabajo

$$W = \int_0^3 \pi\rho g (6y - y^2)(3-y)\, dy$$

la cual puede integrarse fácilmente mediante el cambio de variable

$$u = 6y - y^2 \quad \Rightarrow \quad du = (6 - 2y)\, dy \quad \Rightarrow \quad du = 2(3-y)\, dy$$

$$\int (6y - y^2)(3-y)\, dy = \frac{1}{2}\int u\, du = \frac{u^2}{4} + c = \frac{(6y-y^2)^2}{4} + c$$

$$W = \int_0^3 \pi\rho g (6y - y^2)(3-y)\, dy = \left[\pi\rho g \frac{(6y-y^2)^2}{4}\right]_0^3 = \frac{81\pi\rho g}{4} \quad \textit{Joules}$$

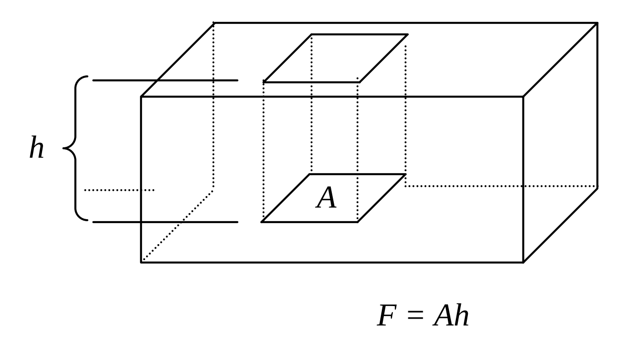
6.5 Presión Hidrostática.

En esta aplicación de la integral abordaremos el problema de determinar la presión con la que un líquido actúa sobre una pared vertical, o sobre una de las paredes del recipiente que lo contiene.

Los principios básicos se detallan a continuación

Presión sobre una superficie horizontal

El caso más sencillo sería el de determinar la presión con la que el agua actúa sobre el fondo de un recipiente lleno de agua. En este caso y en general para una superficie plana horizontal bajo el agua, una ley de la Hidrostática nos dice que la presión del agua sobre ella es igual al peso de la columna de agua que soporta, es decir, de una columna de agua que tiene esta superficie como base y cuya altura es la profundidad a la que se encuentra sumergida dicha superficie. Como se trata de agua, cuyo peso específico es 1, el peso de esta columna numéricamente es igual al volumen.



$$F = Ah$$

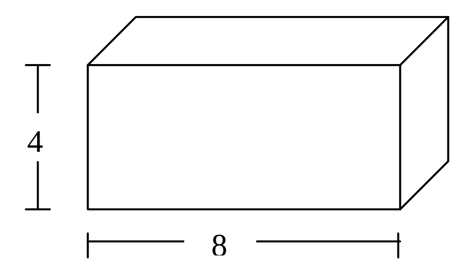
Presión sobre una superficie no horizontal.

Si la superficie sumergida no está horizontal, entonces los diversos puntos de ella se encuentran a diferentes profundidades y no podemos hablar de la profundidad de sumersión de la superficie como un todo. Pero, si esta superficie es muy pequeña, entonces es posible hacer cálculos aproximados, suponiendo que todos sus puntos están a una misma profundidad, la cual es considerada como la profundidad a la que se encuentra la superficie.

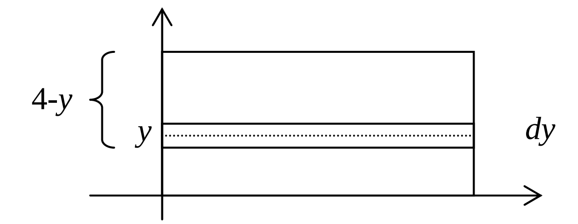
Trataremos pues con este tipo de superficies planas muy pequeñas y para determinar la presión sobre ella, imaginemos que se hace girar la superficie alrededor de uno de sus puntos, como si se tratara de una hoja de persiana, hasta que la superficie toma una posición horizontal. Como la presión en un punto se transmite en todas direcciones con la misma intensidad y sólo depende de la profundidad, y la superficie es muy pequeña, al girar, todos sus puntos se mantienen aproximadamente a la misma profundidad, por lo que la presión sobre ella no variará sensiblemente con la posición de giro y por lo tanto

podemos considerar que la superficie se encuentra en posición horizontal y calcularle a esta la presión.

Ejemplo 1. Determinar la Fuerza (***Presión Hidrostática***) con la que el agua actúa sobre la pared frontal del siguiente recipiente lleno de agua de la figura.



Solución: Ubiquemos la pared frontal en un sistema coordenado.



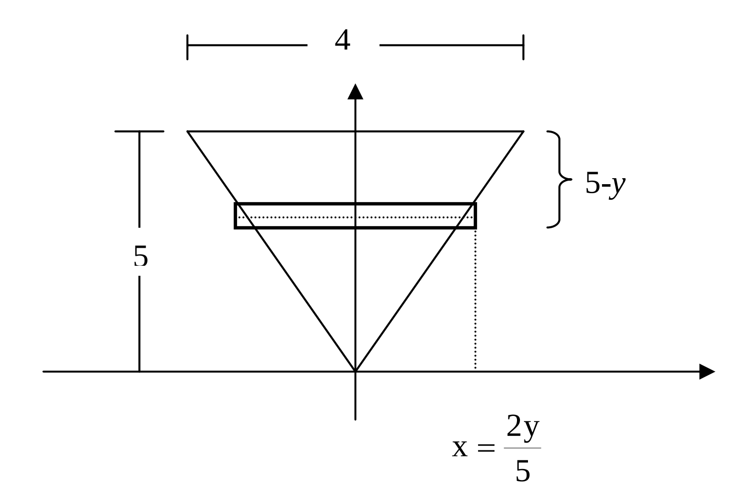
Para cada $y \in [0, 4]$, consideremos el pequeño rectángulo de largo 8 y altura dy, el cual se encuentra a una profundidad $(4 - y)$. En base a la discusión anterior, la fuerza con la que el agua actúa sobre ella será aproximadamente igual a la fuerza con que actuaría sobre el mismo rectángulo pero en posición horizontal, es decir, el diferencial de Fuerza será:

$$dF = 8 \bullet dy \bullet (4 - y)$$

y por lo tanto el valor total de la Fuerza:

$$F = \int_0^4 8(4 - y)\, dy = \int_0^4 (32 - 8y)\, dy = \left[32y - 4y^2\right]_0^4 = 128 - 64 = 64 \text{ unidades de fuerza.}$$

Ejemplo 2. Determinar la presión con la que el agua actúa sobre una placa triangular, como la de la figura, sumergida verticalmente en agua.



Solución. Para cada $y \in [0, 5]$,

$$dF = \left(\frac{4y}{5}\right) \bullet dy \bullet (5 - y)$$

y la fuerza total:

$$F = \int_0^5 \left(\frac{4y}{5}\right)(5 - y)dy = \frac{50}{3}$$

EJERCICIOS

I. Encuentre en cada caso el área de la región comprendida entre las curvas:

1) $y = x^2 -1$, $y - 2x +1 = 0$.

2) $x = y^2$, $x - 3y - 4 = 0$.

3) $x = y^2$, $4y^2 = x + 2$.

4) $y^2 = 5-x$, $y^2 = x + 6$

5) $x = y^2$, $x + 2y - 3 = 0$

6) $x = y^2-9$, $x - y - 3 = 0$.

II. Encuentre en cada caso:

1. El volumen de una esfera de radio r
2. El volumen de un cono de radio r y altura h, como sólido de revolución alrededor del eje x.
3. El volumen de un cono de radio r y altura h, como sólido de revolución alrededor del eje x.
4. El volumen de un cono de radio r y altura h, como sólido de revolución alrededor de la recta $x = 2$
5. El volumen del sólido obtenido al girar en torno al eje x, la región comprendida entre las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = -1$ y $x = 1$.
6. El volumen del sólido obtenido al girar en torno a la recta $y = 3$, la región comprendida entre las gráficas de $y = x^2 +2$, $y = 0.5x +1$, $x = 0$ y $x = 1$.
7. El volumen de un cono truncado de radio mayor 6, radio menor 3, y altura 8**,** como sólido de revolución alrededor del eje y.
8. El volumen de un cono truncado de radio mayor ***R***, radio menor ***r***, y altura ***h*,** como sólido de revolución alrededor del eje x.
9. El volumen obtenido al girar en torno al eje y la región acotada por $y^2 = 8x$ en [0,2].
10. El volumen obtenido al girar en torno a la recta $x = 1$ la región acotada por $y^2 = x + 4$ en [-4,1].

III. Resuelva los siguientes problemas de trabajo mecánico:

a) Encuentre el trabajo requerido para vaciar un tanque cilíndrico lleno de agua, de 6 m de radio y 12 m de altura.

b) Encuentre el trabajo requerido para vaciar el tanque del problema anterior, si se encuentra a la tercera parte de su capacidad.

c) Encuentre el trabajo requerido para vaciar un tanque cónico lleno de agua, de 5 m de radio y 10 m de altura.

d) Encuentre el trabajo requerido para vaciar el tanque del problema anterior, si se encuentra a la tercera parte de su capacidad.

e) Encuentre el trabajo requerido para vaciar el tanque del problema anterior, si se encuentra a la mitad de su capacidad.

f) Encuentre el trabajo requerido para vaciar un tanque semiesférico de 8 m de radio, si se encuentra lleno de agua.

g) Un canalón de 8 m de largo cuyos extremos son triángulos equiláteros de 2 m de ancho, está lleno de agua. Calcule el trabajo que se requiere para extraer toda el agua por encima del borde.

h) Un resorte tiene una longitud natural de 25 cm. Si una fuerza de 350 dinas se requiere para mantenerlo estirado 5 cm, ¿Cuál es el trabajo realizado al estirar el resorte de su longitud natural hasta una longitud de 32 cm.

i) Un elevador de carga (montacargas) que tiene una masa de 1500 kg está sostenido por un cable de 4m de largo y una densidad lineal de masa de 7 kg por metro lineal. Calcule el trabajo que se requiere para subir el ascensor 3m enrollando el cable en un torno.

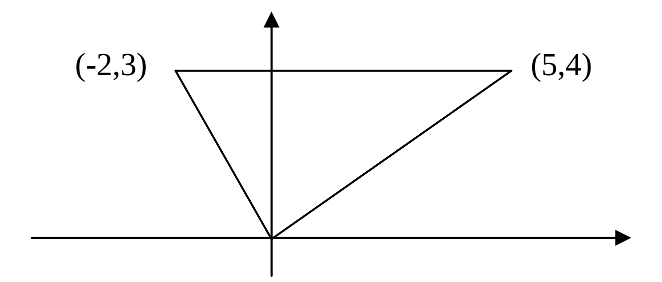
j) La fuerza (en dinas) con la que dos electrones se repelen es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (en cm) que los separa. Calcule el trabajo realizado al mover un electrón a lo largo del eje x desde el origen hasta el punto (3,0) mientras otro se mantiene fijo en el punto (5,0).

3. Resuelva los siguientes problemas de fuerza ejercida por líquidos.

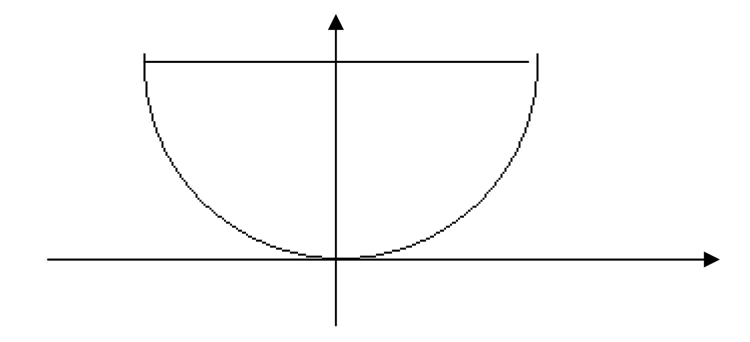
a) Un acuario de vidrio tiene una longitud de 1 m y extremos cuadrados de 30 cm de lado y está lleno de agua. Calcule la fuerza ejercida por el agua sobre: un lado, sobre un extremo y sobre el fondo.

b) Suponga que uno de los extremos cuadrados del acuario del ejercicio anterior se divide en dos partes mediante una diagonal. Calcule la fuerza ejercida en cada una de las partes.

c). Determine la fuerza con la que el agua actúa sobre una placa en forma de triángulo con el vértice hacia arriba, como se muestra en la figura:



c) Encuentre la fuerza con la que el agua actúa sobre una placa semicircular de radio 4 sumergida en agua, como se muestra en la figura:



d). Demuestre que la fuerza con la que le agua actúa sobre una placa en forma de triángulo isósceles con vértice hacia abajo, de base *b* y altura *h* es:

$$F = \frac{ah^2}{6}$$

e)). Demuestre que la fuerza con la que le agua actúa sobre una placa en forma de triángulo isósceles con vértice hacia arriba, de base *b* y altura *h* es

$$F = \frac{ah^2}{3}$$